УДК 539.3

РАСЧЁТ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ В ПОЛИМЕРНОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ С КРУГОВЫМ ВЯЗКОУПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ[1)]

Д.А. ШАВЫРИН, К.М. ЗИНГЕРМАН

Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail shavyrin_dmitriy@mail.ru; zingerman@rambler.ru

CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE IN THE POLYMER VISCOELASTIC SPECIMEN WITH CIRCULAR VISCOELASTIC INCLUSION AT FINITE DEFORMATION

D.A. SHAVYRIN, K.M. ZINGERMAN

Tver State University, Tver'

Аннотация

Сформулирован метод аналитического решения плоской задачи теории вязкоупругости о напряжённо-деформированном состоянии бесконечно протяжённого вязкоупругого тела, в котором имеется круговое вязкоупругое включение с другими свойствами, когда на бесконечности заданы напряжения, при конечных деформациях. Материалы в задаче считаются сжимаемыми, их механические свойства описываются определяющими соотношениями, обобщающими на случай вязкоупругости соотношения для потенциала Мурнагана. При решении используются метод малого параметра, метод интегральных преобразований Лапласа и комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили. На основе полученного решения проведён анализ распределения напряжений в различные моменты времени.

Ключевые слова: теория вязкоупругости, плоская задача, вязкоупругое включение, аналитическое решение, комплексные потенциалы, компьютерная алгебра, конечные деформации, геометрическая нелинейность.

Summary

The method of the analytical solution is formulated and the algorithm is developed for a specific plane problem of the theory of viscoelasticity. This is the problem of the stress-strain state in infinitely extended body with circular viscoelastic inclusion when the stresses at infinity are fixed at finite strains. Materials in the problem are considered compressible. Their mechanical properties are described by defining relations, generalizing the case of viscoelasticity relation for potential Murnaghan. Solution uses perturbation technique, Laplace transform and complex Kolosov-Muskhelishvili potentials. The stress distribution in different times is analyzed on the basis of the obtained solution.

Key words: theory of viscoelasticity, plane problem, viscoelastic inclusion, analytical solution, complex potentials, computer algebra, finite strain, geometric nonlinearity.

1. Постановка задачи.

Исследуется напряжённо-деформированное состояние бесконечно протяжённого вязкоупругого тела (матрицы), в котором имеется круговое вязкоупругое включение с другими свойствами, когда на бесконечности заданы напряжения. Эта задача решается в квазистатической постановке при конечных плоских деформациях. Материалы матрицы и включения считаются сжимаемыми. Предполагается, что на границе между включением и матрицей выполнены условия идеального контакта — условия непрерывности вектора перемещений и вектора нормальных напряжений. Требуется решить задачу о квазистатическом

[1)] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-01191-а)

деформировании тела при заданных напряжениях на бесконечности. Считается, что напряжения остаются ограниченными при стремлении к бесконечности. При таком условии решение соответствующей линейной вязкоупругой задачи будет единственным. Рассматривается общий случай, когда на бесконечности к телу прикладываются нормальные и касательные нагрузки.

В качестве математической модели вязкоупругой среды используется модель стандартного линейного вязкоупругого тела, обобщенная на случай конечных деформаций. Это частный случай более общих моделей, описанных ранее в [5, 6, 8, 13].

Здесь и в дальнейшем индексом M отмечаются величины, относящиеся к матрице, а индексом B – к включению. Если индексы не указаны, то выражения относятся как к матрице, так и к включению. Система координат выбрана таким образом, чтобы направления нагружения совпали с осями декартовой системы координат x и y, а начало координат совпало с центром включения.

Математическая постановка задачи описывается в координатах недеформированного состояния. Далее использованы следующие обозначения: u — вектор перемещений, Ψ — аффинор деформаций, $\overset{0}{E}$ — тензор деформаций Грина, $\overset{0}{\Sigma}$ — тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода, σ — тензор истинных напряжений, $\overset{0}{\nabla}$ — градиент, I — единичный тензор, $\overset{0}{N}$ — нормаль к исходной границе включения.

Уравнение равновесия имеет вид

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \left[\overset{0}{\Sigma} \cdot \Psi \right] = 0, \tag{1}$$

здесь

$$\overset{0}{\Sigma} = \big(1 + \Delta\big) \Psi^{*-1} \cdot \sigma \cdot \Psi^{-1}. \tag{2}$$

Закон вязкоупругости записывается в форме:

$$\overset{0}{\Sigma}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \lambda(t-\tau) \left(\frac{\partial \overset{0}{E}(\tau)}{\partial \tau} : I \right) I d\tau + 2 \int\limits_{-\infty}^{t} G(t-\tau) \frac{\partial \overset{0}{E}(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \tag{3}$$

здесь ядра релаксации λ – объёмное и G – сдвиговое

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 e^{-\alpha t}, \quad G(t) = G_0 + G_1 e^{-\beta t}. \tag{4}$$

Модули λ_i и G_i при $i = 0, 1$, а также α и β могут принимать различные значения в матрице и во включении.

Кинематические соотношения имеют вид

$$\overset{0}{E} = \frac{1}{2} \left(\Psi \cdot \Psi^* - I \right), \quad \Psi = I + \overset{0}{\nabla} u. \tag{5}$$

В постановку задачи входят также условия на бесконечности

$$\sigma_M \big|_\infty = \sigma_M^\infty, \tag{6}$$

а также условия непрерывности вектора перемещений u и вектора нормальных напряжений $\overset{0}{N} \cdot \overset{0}{\Sigma} \cdot \Psi$ на границе матрицы и включения

$$\begin{gathered} \overset{0}{N} \cdot \overset{0}{\Sigma}_M \cdot \Psi_M|_\Gamma = \overset{0}{N} \cdot \overset{0}{\Sigma}_B \cdot \Psi_B|_\Gamma, \\ u_M|_\Gamma = u_B|_\Gamma \, . \end{gathered} \tag{7}$$

2. Метод решения.

Для решения задачи применяется метод возмущений (малого параметра). Выбирается малый параметр μ в виде

$$\mu = \max\nolimits_{i,j} \left| \overset{0}{\Sigma}{}_{ij}^{\infty} \right| / G_0^M \tag{8}$$

и для всех величин, входящих в постановку задачи, записывается разложение в ряд по этому параметру. Например, для вектора перемещений u такое разложение может быть записано в форме

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} + \dots, \quad u^{(j)} \sim \mu^{j+1}. \tag{9}$$

В результате решение нелинейной задачи сводится к последовательному решению линеаризованных задач.

Решение линеаризованной задачи для каждого приближения определяется методом Колосова—Мусхелишвили [3, 4, 12] с использованием алгоритмов, изложенных в [3, 10, 11, 16]. При решении используется метод интегральных преобразований Лапласа [1, 5, 9]. Для внешней нагрузки и ядер релаксации используем их функции в изображениях. Комплексные потенциалы определяются в виде отрезков рядов Лорана по степеням $z = x + iy = re^{i\vartheta}$. Методика решения из [14] обобщена на случай нормальных и касательных нагрузок.

$$\begin{gathered}
\varphi_M(z) = \frac{p+q}{4} \sum_{k=-1}^{\infty} a_k^{(0)} z^{-k}, \quad \psi_M(z) = \frac{q-p+2is}{2} \sum_{k=-1}^{\infty} b_k^{(0)} z^{-k}, \\
\varphi_B(z) = \frac{p+q}{4} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(0)} z^{k}, \quad \psi_B(z) = \frac{q-p+2is}{2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(0)} z^{k}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Формулы (10) относятся к нулевому приближению. Здесь p, q — нормальные напряжения на бесконечности, s — касательные напряжения на бесконечности.

Подставляя потенциалы, представленные в виде рядов, в граничные условия (условия на бесконечности и условия идеального контакта), получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения выражений для коэффициентов рядов через изображения нагрузок и ядер релаксации. Большинство коэффициентов получаются нулевыми. Принимая радиус включения равным R, имеем следующие выражения в изображениях для ненулевых коэффициентов:

$$\begin{aligned}
a_1^{(0)} &= \frac{2R^2\,(p-q+2s)\,(G_M - G_B)}{(p+q)\,(G_M + G_B \varkappa_M)}, \\
b_1^{(0)} &= \frac{R^2\,(p+q)\,(p-q+2s)\,(G_B\,(\varkappa_M - 1) - G_M\,(\varkappa_B - 1))}{\left((p-q)^2 + 4s^2\right)(2G_B + G_M\,(\varkappa_B - 1))}, \\
b_3^{(0)} &= \frac{R^4\left((p-q)^2 + 4s\,(p-q-s)\right)(G_B - G_M)}{\left((p-q)^2 + 4s^2\right)(G_M + G_B \varkappa_M)}, \\
c_1^{(0)} &= \frac{G_B\,(\varkappa_M + 1)}{2G_B + G_M\,(\varkappa_B - 1)}, \\
d_1^{(0)} &= \frac{G_B\,(\varkappa_M + 1)}{G_M + G_B \varkappa_M}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Отметим, что можно ограничиться в суммах (10) конечным числом слагаемых до $k = 3$ включительно без потери точности, поскольку коэффициенты при старших степенях z будут нулевыми.

Выражения, связывающие потенциалы с напряжениями и перемещениями впервые получены Г.В. Колосовым [4, 7, 12].

Для первого приближения используется алгоритм нахождения решения из [10, 11]. Отличие заключается в том, что в [10, 11] с помощью этого алгоритма решены задачи для нелинейно-упругих материалов, а в данной работе - для вязкоупругих, и решение зависит от времени. Величины, определяемые из нулевого приближения, входят в алгоритм в виде функций пространственных координат и времени. Для первого приближения, как и для нулевого, применяется преобразование Лапласа, чтобы решить задачу в изображениях. Используя комплексные потенциалы по аналогии с нулевым приближением, получаем выражения в изображениях для напряжений и перемещений. Применяя обратное преобразование Лапласа, находим решение в оригиналах.

Решение найдено в аналитической форме, но учитывая громоздкость выражений, ограничимся только численными результатами.

3. Результаты расчётов.

Для решения задачи было разработано программное обеспечение в среде системы компьютерной алгебры Maple [2]. Были вычислены первые два приближения.

Были выполнены расчёты при следующих значениях вязкоупругих констант: $\alpha_M = \beta_M = \alpha_B = \beta_B$, $\lambda_0^M/G_0^M = 1.5$, $\lambda_1^M/G_0^M = 14$, $G_1^M/G_0^M = 4$, $\lambda_0^B/G_0^M = 15$, $\lambda_1^B/G_0^M = 140$, $G_0^B/G_0^M = 10$, $G_1^B/G_0^M = 40$. В данном случае включение более жёсткое, чем матрица. На бесконечности в момент $t\alpha_M = 0$ одновременно прикладываются нагрузки величины $0.05G_0^M$: растягивающая вдоль оси x и сжимающая вдоль оси y.

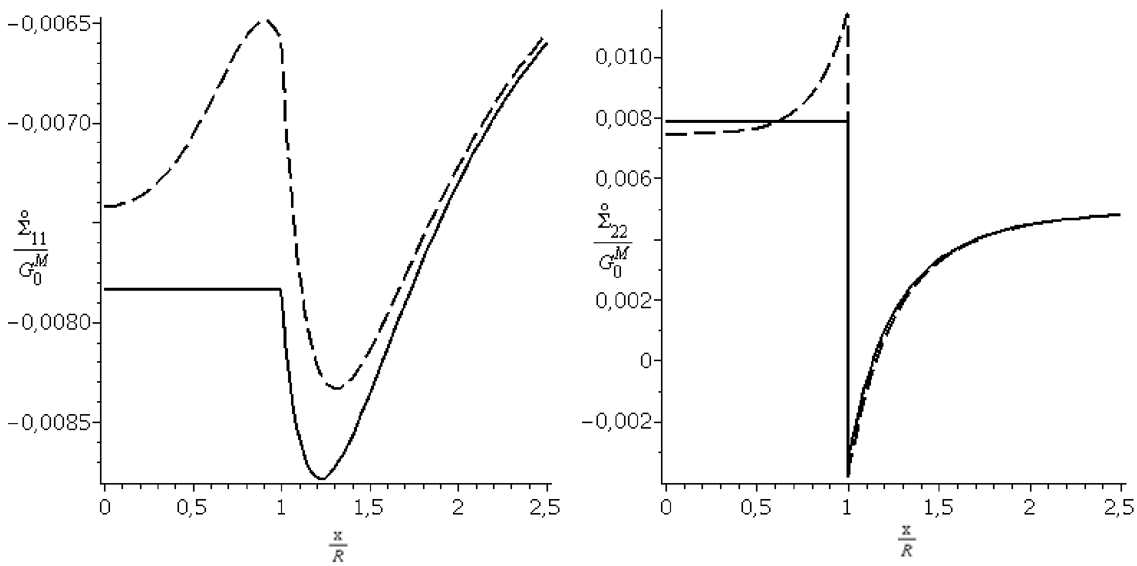

Рис. 1: Распределение напряжений $\overset{0}{\Sigma}_{11}$ и $\overset{0}{\Sigma}_{22}$ вдоль оси x в момент времени $t\alpha_M = 0$

На рис. 1–2 показано распределение напряжений $\overset{0}{\Sigma}_{11}$ и $\overset{0}{\Sigma}_{22}$ вдоль оси x в моменты времени $t = 0$ и $t = 30$. На рис. 3 представлен график изменения напряжений со временем вблизи центра включения. Сплошная линия на графиках соответствует линейному решению, пунктирная — решению с учётом нелинейных эффектов. Поправка от учёта нелинейных эффектов для компонент тензора напряжений не превосходит 42%, а для вектора перемещений (на рисунках не показано) — 5%. Напряжённо-деформированное состояние включения в нулевом приближении однородно, что согласуется с результатами решения задачи об упругом включении в упругой среде в линейной задаче [15].

4. Заключение.

Разработаны метод, алгоритм и программное обеспечение для приближённого аналитического решения плоской задачи о квазистатическом деформировании бесконечно протяжённого вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением при заданных напряжениях на бесконечности при конечных деформациях. Исследовано распределение напряжений в различные моменты времени.

Результаты решения этой задачи могут быть использованы при расчёте на прочность композиционных материалов с наноразмерными частицами наполнителя, а также для анализа и верификации существующих численных решений аналогичной задачи. Дана оценка нелинейных эффектов, исследовано изменение

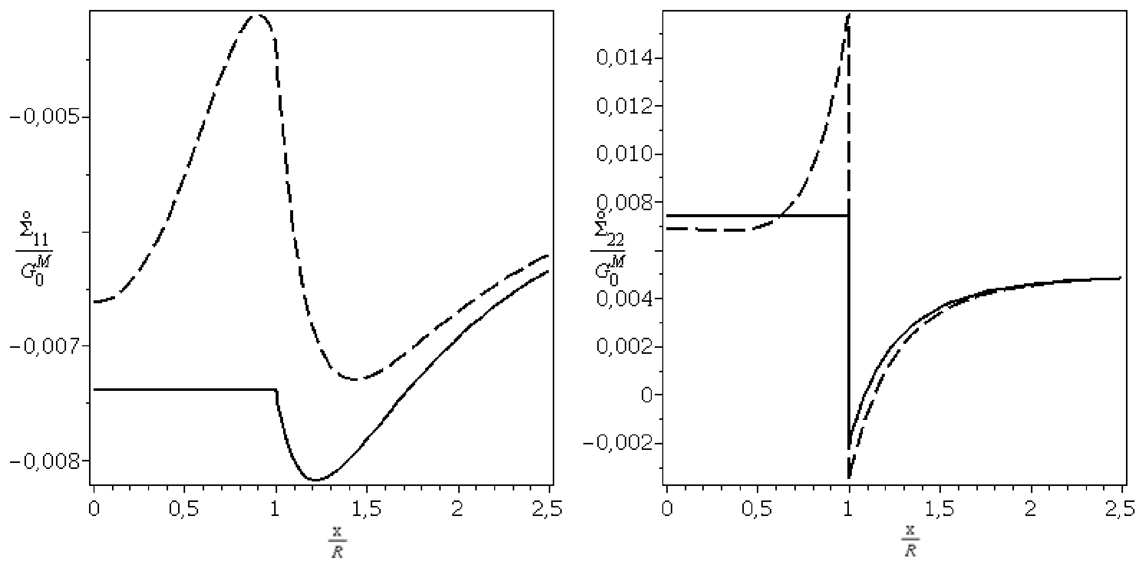

Рис. 2: Распределение напряжений $\overset{0}{\Sigma}_{11}$ и $\overset{0}{\Sigma}_{22}$ вдоль оси x в момент времени $t\alpha_M = 30$

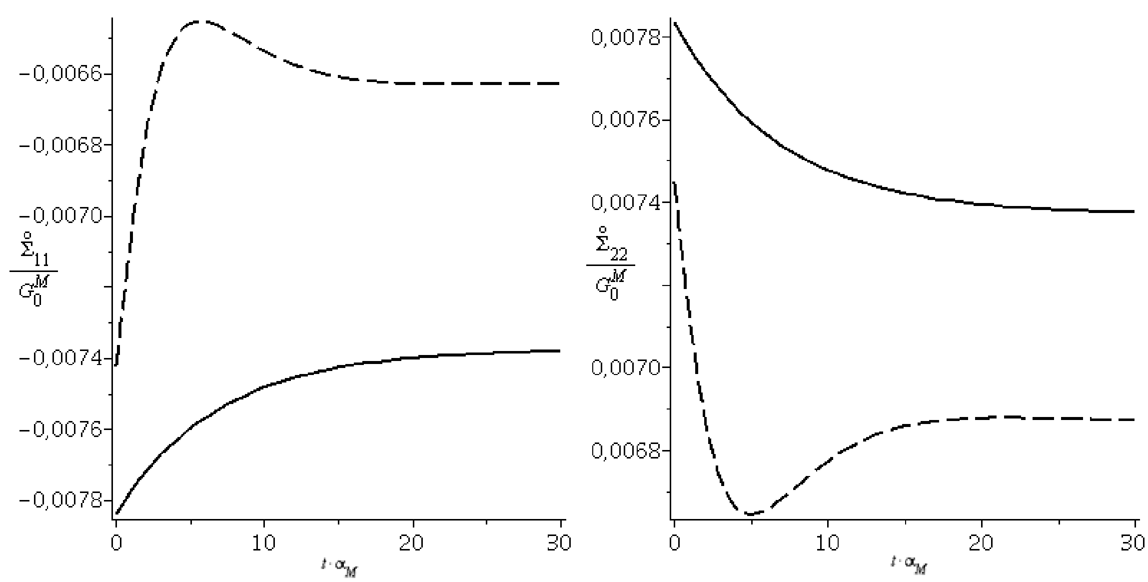

Рис. 3: Изменение напряжений $\overset{0}{\Sigma}_{11}$ и $\overset{0}{\Sigma}_{22}$ в точке $(x, y) = (0, 0)$ в координатах недеформированного состояния

напряжённо-деформированного состояния с течением времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Диткин В.А., Прудников А. П.**Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.
2. **Дьяконов В.П.**Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2006. – 720 с.
3. **Зингерман К.М., Левин В.А.** Перераспределение конечных упругих деформаций после образования включений. Приближенное аналитическое решение // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73, вып. 6. – С. 983–1001.
4. **Зингерман К.М., Левин В.А.**Последовательное образование двух неравных эллиптических отверстий в теле из вязкоупругого несжимаемого материала. Конечные деформации. // Известия АН. Механика твердого тела. – 1999. – № 4. – С. 162–169.
5. **Ильюшин А.А., Победря Б.Е.**Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
6. **Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г.**Прочностные расчёты изделий из полимерных материалов. – М.: Машиностроение, 1983. – 239 с.
7. **Колосов Г.В.**Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости. – Юрьев: Маттисен, 1908. – 187 с.
8. **Кристенсен Р.**Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 340 с.
9. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.**Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1973. – 749 с.
10. **Левин В.А., Зингерман К.М.**Плоские задачи многократного наложения больших деформаций. Методы решения. – М.: Физматлит, 2002. – 272 с.
11. **Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В.**Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. – М.: Физматлит, 2007. – 392 с.
12. **Мусхелишвили Н.И.**Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 709 с.
13. **Савин Г.Н.**Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 887 с.
14. **Шавырин Д.А.**Аналитическое решение плоской задачи о квазистатической деформации бесконечно протяжённого вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением средствами компьютерной алгебры // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. – 2013. – Вып. 1 (28). – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2013. – С. 45–53.
15. **Эшелби Дж.**Континуальная теория дислокаций. – М: ИЛ, 1963. – 248 с.
16. **Levin V.A., Zingerman K.M.**A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains // Communications in Numerical Methods in Engineering. – 2008. – V. 24, Is. 12. – P. 2240–2251.

REFERENCES

1. **Ditkin V.A., Prudnikov A. P.**Integral Transforms and Operational Calculus [Integral'nye preobrazovanija i operacionnoe ischislenie]. – Moscow: Fizmatgiz, 1961. – 524 p. (in Russian)
2. **D'jakonov V.P.**Maple 9.5 / 10 in mathematics, physics and education [Maple 9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii]. – Moscow: SOLON-Press, 2006. – 720 p. (in Russian)

3. **Zingerman K.M., Levin V.A.**Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2009. — V. 73, № 6. — P. 710–721.
4. **Zingerman K.M., Levin V.A.**Successive formation of two unequal elliptic holes in a viscoelastic incompressible solid: finite strains // Mechanics of Solids. — 1999. — V. 34, № 4. — P. 136–143.
5. **Il'jushin A.A., Pobedrja B.E.**Fundamentals of Mathematical Thermoviscoelasticity Theory [Osnovy matematicheskoj teorii termovjazkouprugosti]. — Moscow: Nauka, 1970. — 280 p. (in Russian)
6. **Koltunov M.A., Majboroda V.P., Zubchaninov V.G.**Strength calculations of products from polymeric materials [Prochnostnye raschjoty izdelij iz polimernyh materialov]. — Moscow: Mashinostroenie, 1983. — 239 p. (in Russian)
7. **Kolosov G.V.**An application of the theory of functions of a complex variable to the plane elasticity problem [Ob odnom prilozhenii teorii funkcij kompleksnogo peremennogo k ploskoj zadache teorii uprugosti]. — Jur'ev: Mattisen, 1908. — 187 p. (in Russian)
8. **Kristensen R.**Introduction to the theory of viscoelasticity. Academic Press, 1971. — 245 p.
9. **Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.**Methods of the theory of functions of a complex variable [Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo]. — Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. 1973. — 749 p. (in Russian)
10. **Levin V.A., Zingerman K.M.**Plane problems of multiple overlay large deformations. Methods of solution [Ploskie zadachi mnogokratnogo nalozhenija bol'shih deformacij. Metody reshenija]. — Moscow: Fizmatlit, 2002. — 272 p. (in Russian)
11. **Levin V.A., Kalinin V.V., Zingerman K.M., Vershinin A.V.** Development defects at finite deformations. Computer and physical simulation [Razvitie defektov pri konechnyh deformacijah. Komp'juternoe i fizicheskoe modelirovanie]. — Moscow: Fizmatlit, 2007. — 392 p. (in Russian)
12. **Mushelishvili N.I.**Some basic problems of the mathematical theory of elasticity [Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti]. — Moscow: Nauka, 1966. — 709 p. (in Russian)
13. **Savin G.N.**Stress distribution around holes [Raspredelenie naprjazhenij okolo otverstij]. — Kiev: Naukova dumka, 1968. — 887 p. (in Russian)
14. **Shavyrin D.A.**Analytical solution of the plane problem of the quasi-static deformation of an extended indefinitely viscoelastic body with a circular viscoelastic inclusion Computer Algebra [Analiticheskoe reshenie ploskoj zadachi o kvazistaticheskoj deformacii beskonechno protjazhjonnogo vjazkouprugogo tela s krugovym vjazkouprugim vkljucheniem sredstvami komp'juternoj algebry] // Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Prikladnaja matematika. — Tver': Tver. gos. un-t. — 2013. — № 1 (28). — P. 45–53. (in Russian)
15. **Eshelby J.D.**Continuum Theory of Dislocations [Kontinual'naja teorija dislokacij. — Moscow: IL, 1963. — 248 p. (in Russian)
16. **Levin V.A., Zingerman K.M.**A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains // Communications in Numerical Methods in Engineering. — 2008. — V. 24, Is. 12. — P. 2240–2251.